El computador y las matemáticas

¿Qué no hubiesen dado Arquímedes, Newton o Gauss por poseer un computador de los que ahora disponemos? La ciencia griega del periodo clásico tuvo su primera crisis conocida con el descubrimiento de las magnitudes irracionales, pero ya en la etapa alejandrina Arquímedes supo cómo tratarlas y calculó las primeras cifras decimales de π (= 3.1415…) basándose en una fórmula recursiva que relaciona entre sí a los perímetros de los polígonos regulares de *n* y *2n* lados inscritos en una circunferencia de radio unidad. Ahora una sencilla calculadora de bolsillo nos permite fácilmente añadir otras cifras a ese desarrollo aplicando la misma fórmula de Arquímedes. Con la ayuda de ordenadores potentes, y con algoritmos algo más sofisticados, se han logrado calcular cientos de miles de millones de cifras decimales de π, aunque eso no quita ningún mérito a la proeza de Arquímedes, quien hizo sus cálculos "a la griega", sin computadores y sin nuestro eficiente y cómodo sistema decimal de numeración. Si con permiso de Newton avanzamos unos siglos nos encontraremos con Gauss (1777-1855), "*Princeps Mathematicorum*", cuyas contribuciones son fundamentales en tantas áreas de las Matemáticas y de la Física. Gauss era un magnífico calculador que llevó a cabo complicadas cuentas astronómicas y que solía también acumular una ingente cantidad de datos antes de formular sus conjeturas. Con sus tablas de números primos menores que tres millones observó que la densidad de éstos en la sucesión de los números naturales decae como el inverso del logaritmo. Es decir, enunció el Teorema de los Números Primos, que fue demostrado rigurosamente unos setenta años más tarde por Hadamard y De la Vallée-Poussin. Al hilo de la pregunta con la que iniciamos este ensayo, podríamos legítimamente especular con la cantidad de conjeturas y problemas interesantes que esos tres genios hubiesen descubierto de haber contado con uno de nuestros modernos computadores. Pero sirva al menos esta divagación para dejar constancia de una de las más genuinas interacciones, aunque desde luego no la única y quizás tampoco la más profunda, entre los computadores y las matemáticas: los matemáticos hacen uso de los ordenadores para obtener "datos experimentales" en los que encontrar patrones, simetrías y recurrencias que permitan formular conjeturas plausibles y señalar caminos por donde avanzar. También los utilizan para realizar cálculos muy complejos, tales como los que son necesarios para describir las trayectorias de un sistema dinámico; dibujar geometrías extrañas; diseñar las alas de un avión; procesar los datos obtenidos por el escáner para obtener imágenes nítidas de los tejidos o para analizar el riesgo financiero. Son éstos algunos ejemplos que muestran el papel que el binomio matemático+ordenador desempeña en la tecnología moderna y en nuestra vida cotidiana.

Hay dos demostraciones recientes basadas en el ordenador que son especialmente notables: se trata de la prueba del teorema de los cuatro colores, obtenida por Appel y Haken en 1976, y la solución de la conjetura de Kepler que se debe a Hales y que acaba de aparecer publicada en *Annals of Mathematics* (noviembre de 2005), aunque data de 1998. Su notoriedad está justificada por el tiempo transcurrido entre la formulación del problema y su solución (ciento cincuenta años tiene el primero y unos cuatro siglos el segundo), por tener enunciados asequibles a la mayoría de los ciudadanos, por la cantidad y calidad de los matemáticos que intentaron su demostración y, finalmente, porque ésta ha necesitado, en ambos teoremas, de cálculos masivos que, uno por uno, verifican una cantidad enorme de casos cuya comprobación directa está varios órdenes de magnitud por encima de las posibilidades humanas. ¿Cuántos colores son necesarios y suficientes para colorear cualquier mapa del plano de manera que regiones conexas adyacentes tengan distinto color? ¿Cuál es la manera más eficiente de empaquetar esferas del mismo tamaño? La aparente sencillez de estas preguntas explican tanto su popularidad como el gancho que han tenido entre varias generaciones de matemáticos, no siendo una sorpresa que hayan trascendido a la opinión pública las vicisitudes de sus soluciones, que exhiben una desproporción manifiesta entre la tarea desarrollada con los métodos tradicionales de las matemáticas y la parte reservada al computador, por lo que hemos de hablar de demostraciones basadas en, más que ayudadas por, el computador. Aparte de su valor intrínseco, estos episodios han servido para estimular una interesante polémica en la que desde un principio se han manifestado diversidad de opiniones: hay quien cree que no son verdaderas demostraciones porque involucran muchos pasos que no pueden ser verificados directamente por el cerebro humano, ya que su validez reside en algo tan elusivo como es la corrección del programa informático y la eficiencia de las máquinas que lo desarrollan; por el contrario, hay quien opina que no son menos válidas que otros tipos de pruebas y que no hay más razones para dudar de la capacidad de los computadores para hacer correctamente cálculos enormes, que de la eficiencia de la mente humana para engarzar cadenas largas de razonamientos sin equivocarse. Naturalmente han surgido programas que comprueban la validez de otros programas y, a su vez, la posibilidad de crear programas que garanticen a éstos, y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un computador cometa un error inesperado? ¿Cuántas pruebas en distintos ordenadores debemos hacer para dar por válida una demostración? Son todas ellas preguntas naturales que surgen al hilo de estos resultados y a las que podemos añadir también otras más tradicionales y platónicas, a las que los ordenadores han añadido nuevos matices: ¿las matemáticas se crean o se descubren? ¿Son una ciencia de observación, como la astronomía, o la irrupción de los computadores las convertirá en experimentales? ¿Qué es una demostración? ¿Hay maneras objetivas de estimar la belleza y la profundidad de un razonamiento?

Quod erat demostrandum

Las demostraciones matemáticas constituyen una de las más altas cimas del pensamiento humano. Hasta mediados del siglo pasado era común sostener que una prueba matemática rigurosa consiste en una cadena de razonamientos engarzados con reglas muy estrictas, que nos permite establecer conclusiones deduciéndolas de las hipótesis de partida; pero de manera tal que los eslabones puedan ser todos comprobados por cualquier persona que tenga el tiempo y el entrenamiento adecuados. Los *Elementos* de Euclides contienen numerosos ejemplos a los que, como dijo Hardy, el paso del tiempo no ha podido añadir una sola arruga a la lozanía de su belleza y precisión. Pero la noción de demostración no ha permanecido estática a lo largo de los tiempos, sino que los matemáticos han ido creando nuevas y más poderosas estrategias, introduciendo conceptos nuevos y herramientas idóneas que nos dotan de una mayor libertad y potencia de razonamiento. La crisis del pensamiento griego a la que antes aludíamos, producida por el descubrimiento pitagórico de que la longitud de la diagonal del cuadrado unidad no es un número racional, está recogida en los *Elementos* en forma de demostración: si suponemos que $\sqrt{2}$ fuese igual a la fracción irreducible a/b tendríamos la igualdad $2b^2 = a^2$, de la que deducimos la paridad del número $a = 2c$ y, por tanto, la igualdad $2c^2 = b^2$ que, a su vez, exige la paridad de b y esto contradice que a y b sean primos entre sí. El principio del tercero excluido no nos deja otra salida que concluir la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Se trata de un razonamiento breve, sencillo, elegante e ingenioso...¡mejor imposible! Siguiendo el rastro de esta historia llegamos a finales del siglo XIX, cuando Cantor observó que los números racionales son biyectables con los naturales (son numerables o pueden ponerse en fila de uno en uno, estricta formación), pero que eso no es posible hacerlo con todos los números reales, racionales e irracionales. Una consecuencia inmediata es que los racionales son un conjunto pequeño, de medida nula entre los reales (*si con los ojos bien cerrados escogemos un número al azar, lo más probable es que sea irracional; pero si lo hacemos con poca precaución será un gran enigma saber si lo es o no*). Según A. Turing, un número es computable si podemos escribir un algoritmo, o programa de ordenador, que calcule cualquiera de sus cifras decimales: los racionales son computables, pero también lo son los números π y $\sqrt{2}$. Ahora bien, como los programas son textos finitos escritos con un número finito de símbolos (los caracteres de nuestro idioma: español, inglés, java, fortran, lisp, etc.), una consecuencia de la teoría de Cantor es que el conjunto de los programas, y por tanto el de los números computables, es numerable. Luego los números computables forman un conjunto de medida cero: eligiendo un número al azar tenemos una probabilidad muy alta (de hecho igual a 1) de que no sea computable. Pero nadie puede señalar a uno de ellos, porque señalarlo, nombrarlo o identificarlo, sería equivalente a escribir un texto o programa con el que podríamos calcular sus cifras, y eso lo impide su propia naturaleza. Las ideas de Turing tienen otras consecuencias interesantes para los objetivos de este ensayo, pero señalemos ahora tan solo la sutileza del argumento: prueba la existencia de los números que no son computables observando que la probabilidad de encontrarlos en la recta real es estrictamente positiva y, al mismo tiempo, demuestra rigurosamente que nunca podremos identificar allí a uno concreto de ellos.

Algunas demostraciones involucran largas cadenas de razonamientos de manera indirecta y complicada. Un ejemplo es el teorema de Carleson sobre la convergencia en casi todo punto de las series de Fourier de las funciones de cuadrado integrable; otro es la prueba de Wiles del Último Teorema de Fermat. También tenemos el anuncio reciente hecho por Perelmann de la verificación de la conjetura de Poincaré, que está todavía en periodo de análisis y comprobación por los topólogos. Los dos primeros, y el tercero si recibe el *nihil obstat*, son casos de demostraciones que cumplen todos los requisitos del rigor, que exhiben grandes dosis de ingenio y son elegantes y bellas a su manera, pero que son muy complejas. Tanto, que dudo de la existencia de un solo matemático que pueda verificar con detalle, por sí mismo, esas tres pruebas en un plazo prudente de tiempo. Por el contrario, las dos últimas, que son también las más recientes, han necesitado del trabajo conjunto de grupos de expertos para obtener el certificado de garantía (lo que se considera ya realizado en el caso del Fermat, pero que está todavía en marcha en el de Poincaré). Un tratamiento aparte merece el "teorema de clasificación de los grupos finitos simples", cuya demostración se ha plasmado en más de 10.000 páginas, en cientos de artículos escritos por cientos de matemáticos. No es este ensayo el lugar adecuado para glosar estos resultados, pero digamos que son importantes y fundamentales, por lo que darán lugar a muchos otros teoremas que estarán basados en ellos. Teniendo en cuenta que la probabilidad de que un error se deslice en un texto matemático extenso no es del todo despreciable, estos ejemplos sugieren varias preguntas acerca de qué es una prueba; o por qué algunas tan complejas son realmente necesarias y cuál es su verdadero interés y fiabilidad. Sobre todo al hilo de la siguiente vuelta de tuerca que ha dado este asunto con la aparición de las demostraciones basadas en, o ayudadas por, el computador; como es el caso del problema de los cuatro colores o de la conjetura de Kepler que hemos mencionado antes.

Aunque existen ahora en el mercado varios paquetes de programas que llevan a cabo manipulaciones simbólicas en Álgebra y en Cálculo Diferencial, me parece, no obstante, que todavía carecemos de "genuinos matemáticos artificiales" que puedan manejar el amplio espectro de razonamientos rigurosos que dominan los expertos de cada área. Y posiblemente nunca los tengamos, porque una cosa son las demostraciones formales y otra muy distinta son las obtenidas, en asociaciones e inspiraciones insospechadas, con el rico y variable arsenal de argumentos rigurosos que la mente humana ha creado y seguirá creando. Pero no me cabe la menor duda de que el ordenador, con su enorme capacidad combinatoria, abastecido del conjunto de proposiciones conocidas y de las reglas formales de derivación de teoremas, será cada vez más capaz de colaborar, no sólo con resultados más o menos rutinarios o esperados, sino incluso aportando combinaciones nuevas que no hayan sido previstas por los humanos. Aunque el progreso en esa dirección es más arduo de lo que se pensaba hasta hace poco, habiéndose experimentado un cierto retroceso cuando se encontró un error en la demostración de la conjetura de Robbins (¿son booleanas las álgebras de Robbins?) que pareció haber llevado a cabo un programa de ordenador, pero en el que posteriormente se detectó un error que obligó a retirar el anuncio de la prueba. De haberse ésta confirmado, hubiérase tratado del primer teorema demostrado por un computador que no habían sabido probar antes los artistas del área con los medios tradicionales. Pero la frustración que supuso el hallazgo de un error en el programa fue un jarro de agua fría para quienes pretenden con ahínco desarrollar la llamada "inteligencia artificial fuerte".

No obstante el extraordinario crecimiento de la informática durante la segunda mitad del pasado siglo, que ha sido desde sus comienzos estimulado por las matemáticas pero a las que luego ha servido de maneras diversas, sugiere muchas preguntas: ¿podrán en el futuro los ordenadores hacer conjeturas interesantes y probar teoremas? ¿Somos los matemáticos una especie en extinción? ¿Estarán las matemáticas del mañana plagadas de demostraciones que dependan de cálculos que sólo pueden hacer las computadoras? ¿Tendremos textos matemáticos llenos de enunciados que afirmen que bajo tales hipótesis, que sabemos ciertas con una probabilidad mayor que 0.9, podemos demostrar que otra proposición es cierta con un error experimental del 1%? ¿Convertirán las computadoras en ciencia experimental a las matemáticas? ¿Podremos abordar matemáticamente los modelos más complejos de la ciencia? ¿Servirán los programas de demostración para liberar a los matemáticos de las tareas más rutinarias y poder concentrarse en los pasos realmente difíciles y creativos, inasequibles a los ordenadores? ¿Aceptar la ayuda del ordenador es el típico pacto con el diablo, con el que ganamos un inmenso poder pero perdemos la noción de verdad? Habida cuenta de la enorme capacidad de la especie humana para encontrar incentivos económicos y motivos de querella, hay ya también quien se ha preguntado si llegará el día en el que un tribunal de justicia tendrá que decidir sobre la validez y corrección de una prueba matemática.

Lógicas consecuencias

Si, parafraseando el famoso discurso de J.F. Kennedy, cambiamos el sentido de la pregunta y nos interrogamos ahora sobre qué han hecho los matemáticos por los computadores, la respuesta es mucho más sencilla: casi todo. Un hito es el trabajo de A. Turing del año 1936 que hemos mencionado antes y en el que se aborda el significado del término "computable". Con ese fin, Turing describe un ordenador virtual, o máquina de Turing, que es el primer diseño teórico de lo que ahora entendemos por un computador. Luego J. von Neumann colaboró decisivamente en el proyecto ENIAC con objeto de construir efectivamente una tal máquina, ante el escepticismo de sus colegas físicos y matemáticos del *Institute for Advanced Study*, según he oído contar muchas veces durante mis estancias en aquel lugar. Ambos, Turing y Von Neumann, participaban en el programa formalista de Hilbert, que era el intento más serio de "salvar los muebles" después del demoledor impacto que la aparición de las antinomias o paradojas había tenido en los planes de Frege y Cantor, entre otros, de fundamentar rigurosamente las matemáticas en la teoría de los conjuntos. Según Hilbert, en un lenguaje formal tenemos un alfabeto, unos signos ortográficos (paréntesis, punto, coma, espacio en blanco, etc.), unos conectivos lógicos (“y”, “o”, “negación”, “implicación”, “igual”) y unos cuantificadores (existe; para todo). Con ellos se pueden escribir fórmulas siguiendo unas reglas estrictas de construcción. Algunas de estas fórmulas bien hechas son elegidas comolos axiomas de la teoría, a la que también hay que dotar de unas reglas de inferencia que permitan obtener unas fórmulas de otras. Una demostración “formal” es una sucesión finita de tales fórmulas de manera que cada una de ellas ora es un axioma, ya se deduce de las anteriores aplicando las reglas de inferencia. La última obtenida es el teorema cuya demostración consiste exactamente en esa misma sucesión de fórmulas. Observemos lo revolucionario que este punto de vista resultaba en sus comienzos y, sin embargo, lo natural que ahora nos parece por su semejanza con los mecanismos de los lenguajes de programación con los que estamos tan familiarizados.

Siguiendo el plan de Hilbert se introdujo el sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel como la base sólida sobre la que construir la teoría de conjuntos, y luego el resto de las matemáticas, evitando las antinomias de Russell y Cantor. Pero, ¿es consistente o está exento de contradicciones? ¿Es completo en el sentido de que siempre sea demostrable una proposición o su contraria? Kurt Gödel encontró la respuesta a estas naturales preguntas con su famoso “Teorema de Incompletitud” que, *lasciate ogni speranza*, resultó ser demoledora para el proyecto formalista: cualquier teoría axiomática, lo suficientemente rica para que podamos desarrollar la Aritmética dentro de ella, contendrá siempre proposiciones indecidibles.

Una cuestión fundamental que plantean las máquinas de Turing es el llamado problema de la parada. Dado un programa bien construido, aceptado por el compilador, puede ocurrir que, transcurrido un cierto tiempo, la máquina se detenga y nosotros obtengamos la respuesta que deseábamos. Pero puede también suceder lo contrario y que la máquina prosiga *ad infinitum*. De hecho, no es nada difícil imaginar programas aritméticos en los que se den cada una de estas dos opciones. El problema de la parada consiste en diseñar un algoritmo que decida *a priori*, en tiempo finito, si los programas van o no van a detenerse. Turing demostró rigurosamente que no puede existir ese algoritmo y que ello es equivalente al teorema de incompletitud de Gödel. Los trabajos de Gödel y de Turing constituyen una magnífica etapa de la lógica matemática del pasado siglo a la que estas líneas no pueden, ni mucho menos, hacer justicia. Pero sí podemos constatar, una vez más, la influencia decisiva que sus teorías tuvieron en el nacimiento y evolución de los lenguajes de programación y en el diseño de los primeros ordenadores.

Las demostraciones “formales” de Hilbert son pues muy distintas de las que normalmente se publican en las revistas de matemáticas (salvo quizás las especializadas en Lógica). Éstas suelen ser pruebas rigurosas basadas en implicaciones comprobadas, resultados previos y asociaciones de ideas que los expertos del área conocen y manejan con precisión. Convertirlas en pruebas formales sería un proceso largo y tedioso que, excepto en casos muy simples, nunca se ha llevado a cabo. Pero me parece que las diferencias que hay entre ambas son un punto importante a la hora de comprender lo que puede realizar un matemático, lo que hace un computador y qué posibilidades nuevas tiene el centauro matemático+computador, al menos cuando restringimos su horizonte a la demostración de nuevos teoremas. Los programas para jugar al ajedrez han establecido claramente que el ordenador será cada vez más poderoso, y superior a la mente humana, en lo que atañe a las demostraciones formales y el manejo de la combinatoria de conjuntos enormes de posibilidades. Pero, pensemos en el episodio de la bañera de Arquímedes, en la famosa manzana de Newton o en la inspiración que llevó a Lebesgue a crear su integral, observando la manera como los albañiles disponían horizontalmente los ladrillos para formar un muro y, con toda la modestia que el caso requiere, permítaseme añadir cómo la visión del baile de los dragones, en la fiesta del año nuevo de 1973 en Chinatown (Chicago), me ayudó a lograr la demostración del ahora llamado teorema maximal de Kakeya, o cuando, en otra ocasión distinta, la contemplación de un cuadro de Malevich me sugirió ideas para entender el intrincado solapamiento de los paralelepípedos en el espacio. Eso, creo yo, son ejemplos de iluminaciones fecundas que los ordenadores no pueden experimentar.

En los dominios del centauro

O quizás habría que decir del Cyborg, para ajustarnos mejor a la terminología moderna. Un asunto típico que ha dado lugar a diversas reflexiones, no siempre muy inspiradas, es el de la llamada "matemática aplicada" en contraposición a la otra, a veces denominada "pura", que debiera suponerse carente de aplicaciones. Enseguida se descubre lo falaz y artificial de tal separación, pero eso no obsta para que haya numerosos artistas que se ponen la divisa de matemático puro o aplicado, crean asociaciones con sus correspondientes revistas, se organizan para conseguir que el gobierno financie prioritariamente sus proyectos y pugnan por el poder académico y sus prebendas según reza el estribillo burlón: *érase un matemático aplicado; aplicado a su propia promoción...* Pero, bromas aparte, resulta evidente el cambio experimentado por las aplicaciones de las matemáticas al resto de las ciencias, y a nuestra vida cotidiana, que han propiciado los computadores. También han aparecido áreas nuevas de actividad con el adjetivo de computacional (álgebra computacional, geometría computacional), o se han desarrollado teorías de análisis numérico en direcciones que adquieren su sentido por la existencia de potentes ordenadores.

Por propia naturaleza, los matemáticos somos reduccionistas y nos esforzamos en demostrar y deducir desde primeros principios, *more geométrico*, las consecuencias de los modelos de la ciencia. En ese empeño se han cosechado éxitos muy notables, siendo las teorías de la gravitación de Newton y de Einstein los mejores paradigmas, pero hay otras en las que andamos todavía estancados, como ocurre con las ecuaciones de la mecánica de los fluidos, y no es preciso invocar a Gödel para suponer que, si no vamos a poder demostrar todas las proposiciones aritméticas verdaderas, sea poco realista la empresa de reducir las teorías científicas a teoremas, especialmente en aquellas ciencias en las que se maneja una gran cantidad de información, como es el caso de la Biología.

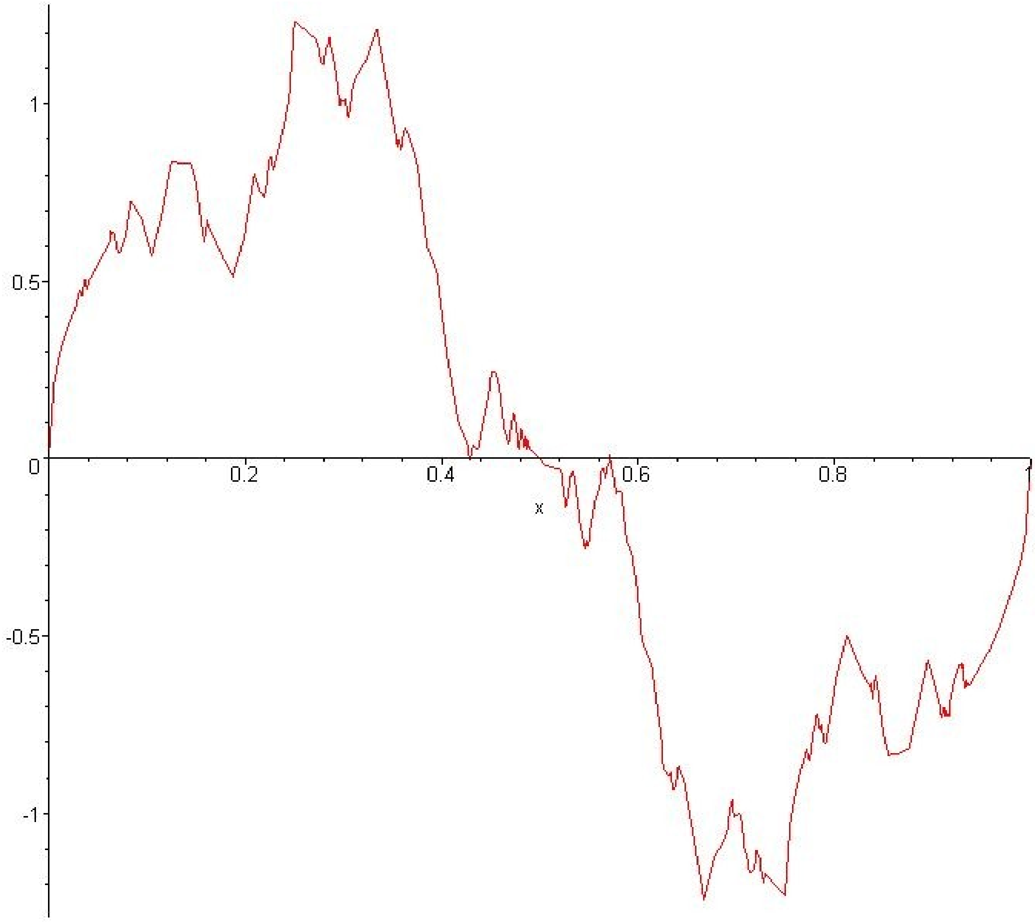
Una estrategia que ha sido utilizada con habilidad en muchas circunstancias consiste en simplificar los modelos, reduciendo la dimensión del espacio o el número de ecuaciones y funciones involucradas, y obtener un modelo "bebé" en el que puedan lograrse resultados rigurosos esperando que, de alguna manera, reflejen lo que ocurre en situaciones más realistas. Hasta no hace mucho ésa era la única posibilidad que teníamos, pero los computadores han cambiado el panorama haciendo posible abordar algunos modelos en su complejidad, no para demostrar teoremas sino para utilizar sofisticadas teorías matemáticas que permiten diseñar algoritmos y hacer simulaciones numéricas que, en algunos casos, sustituyen a medidas y experimentos que son muy difíciles, costosos o imposibles de realizar. Se trata de un fenómeno novedoso cuya incidencia en el devenir de la ciencia es todavía prematuro prever, pero que nos ayuda a discernir los objetivos de una genuina matemática aplicada.

Un ejemplo interesante lo encontramos en la teoría de los números o aritmética superior, que hasta ayer mismo estaba considerada como la quintaesencia de la matemática pura, cuyos teoremas profundos y bellos carecían de aplicaciones prácticas. Resulta que los números primos, cuya sucesión ha fascinado a los matemáticos desde los griegos de hace más de veintiséis siglos, se encuentran ahora en el centro de las aplicaciones por cuanto en sus propiedades está basada la seguridad de las comunicaciones en Internet. Disponer de primos muy grandes, de más de cien cifras, es fundamental para la seguridad, mientras que encontrar algoritmos rápidos de factorización es tarea de quienes desean espiar nuestras comunicaciones, y resulta que cualquiera de estos empeños sería inviable sin la ayuda del computador. Afortunadamente para la seguridad, resulta asequible a nuestros ordenadores encontrar primos de cientos de cifras, o al menos que lo sean con una probabilidad grande, pero se trata todavía de una misión imposible para ellos descomponer, en un tiempo razonable, un número que sea producto de dos de esos primos y sobre cuyos factores no tengamos información alguna. De manera que una antigua rama de las matemáticas se ha visto revitalizada y cambiado la índole de sus problemas en contacto con las nuevas posibilidades de computación.

En la figura siguiente está representada la gráfica, obtenida con la ayuda de un ordenador, de la función

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(2\pi n^2 x) .$$

Introducida por B. Riemann, esta serie trigonométrica tiene una interesante historia relacionada con el importante problema decimonónico de saber si puede existir una curva continua que carezca de tangente en todos sus puntos.



La respuesta a ese problema fue obtenida por Weierstrass, quien dio el primer ejemplo de una tal función en forma de una serie trigonométrica parecida a la anterior, salvo en el importante detalle de que las frecuencias crecen geométricamente, mucho más deprisa que los cuadrados. Empero, la función de Riemann tiene interés por sí misma y siguió estudiándose en el siglo XX por G. Hardy y J. Littlewood, quienes probaron que no es derivable en los puntos irracionales, ni tampoco en diversos casos de racionales. Sin embargo, en 1960, J. Gerver, un alumno de la Universidad de Columbia, demostró que la derivada existe, y es igual a -1, en todas las fracciones irreducibles cuyo denominador es congruente con 2 módulo 4, por ejemplo ½, como puede muy bien apreciarse en la figura.

Creo interesante resaltar que un hecho que se escapó al análisis de matemáticos de la talla de Riemann, Weierstrass, Hardy y Littlewood sea ahora tan evidente para nosotros gracias a los magníficos dibujos que nos hace un simple ordenador personal. Estimulados por ésta y otras figuras de series trigonométricas relacionadas, hemos demostrado recientemente que se trata de conjuntos fractales con una interesante estructura local-global de la que sabemos también calcular su dimensión fraccionaria.

¿Cuál es la energía del estado fundamental de un átomo? Se trata de una pregunta básica si queremos entender las reacciones químicas desde los principios de la mecánica cuántica. En la formulación de Born-Oppenheimer un átomo consta de un núcleo de carga Z y de Z electrones cuantizados cuyo estado viene determinado por su función de ondas. La energía, la cinética más la potencial que origina la interacción coulombiana, se calcula en el modelo a partir del operador hamiltoniano. El estado fundamental es aquel que minimiza la energía y su determinación explícita, salvo en el caso sencillo del átomo de hidrógeno, está fuera de nuestro alcance. No obstante, diversos autores, usando métodos analíticos muy potentes, han demostrado que tiene el desarrollo asintótico $E(Z) = C_1 Z^{7/3} + C_2 Z^2 + C_3 Z^{5/3} + \cdots$ en potencias decrecientes del número atómico Z. El siguiente término, sin embargo, es de naturaleza oscilatoria y eso, que es muy interesante para entender matemáticamente el sistema periódico, resulta estar relacionado con un problema clásico de la teoría de los números: aquel que considera el orden de magnitud del error cometido al calcular el número de puntos del retículo que hay dentro de un círculo de radio muy grande y centrado en el origen, aproximándolo por el área del círculo. La estimación de ese término oscilatorio, que fue publicada en la Academia de Ciencias de Estados Unidos en el año 1994, depende de que una cierta función definida de manera implícita y complicada sea estrictamente positiva. Pero eso sólo lo supimos hacer con la ayuda de un computador. Es decir, elaboramos un programa que usa la aritmética de intervalos para "demostrar rigurosamente" que el mínimo de una función es un número estrictamente positivo.

El último ejemplo que deseo presentar es de mecánica de fluidos, un área cuyas ecuaciones fundamentales se remontan el siglo XVIII, que ha sido un motor para el desarrollo de las matemáticas y que tiene numerosas aplicaciones a la tecnología y a la vida cotidiana; yendo desde las predicciones meteorológicas hasta el diseño de los aviones y siendo entender la naturaleza de los fenómenos turbulentos y prever sus consecuencias uno de los principales objetivos de la ciencia contemporánea. Pero ocurre que el conocimiento que tenemos de las ecuaciones básicas es todavía muy incompleto. En dimensión espacial dos, que es donde disponemos de más información, se ha estudiado la evolución de los torbellinos, que son soluciones de las ecuaciones cuya vorticidad es constante y positiva en una región limitada, anulándose fuera de ella. Como la vorticidad se conserva a lo largo de las trayectorias de las partículas, resulta que el torbellino se va moviendo con el fluido, cambiando tal vez de forma pero conservando otras muchas características, de acuerdo con lo que se observa en el comportamiento de huracanes y tornados.

La evolución del torbellino equivale a la dinámica de su contorno. Usando las ecuaciones de Euler para fluidos incompresibles no viscosos, hace una década se logró demostrar que si el contorno inicial es una curva cerrada y lisa, seguirá siempre de esa manera, sin formar esquinas o subdividirse en varios trozos. Pero hay otros modelos relevantes, como son las ecuaciones cuasi-geostróficas, para las que la misma pregunta tiene interés aunque su estructura matemática las hace más difíciles de tratar. Pues bien, con la ayuda de un conjunto (*cluster*) de ordenadores, en un cálculo complejo y delicado que ha llevado varios meses de computación ininterrumpida, se han obtenido recientemente unas espléndidas imágenes que describen la danza de dos de estos torbellinos, moviéndose con el fluido de tal manera que producen una singularidad en un corto tiempo. El resultado (evidencia de singularidades) ha sido ya publicado en la Academia de Ciencias de Estados Unidos en 2005, pero todavía nos mantiene muy ocupados tratando de elaborar una prueba analítica de este inesperado fenómeno descubierto con el ordenador.

Estos ejemplos, en cuyo análisis he participado, me parecen que son testimonio fehaciente de la influencia que el ordenador tiene en la investigación matemática contemporánea. Quienes me conocen saben de mi torpeza con los programas de ordenador y, en general, de mis pésimas relaciones con las máquinas; por lo que, aparte de evidenciar el mérito de mis colaboradores creo que es muy significativo, para estimar el grado de esa influencia del ordenador, el que alguien de mis características haya trabajado en varios proyectos matemáticos que lo involucran de forma tan decisiva.

Red de redes

Como ocurre en otras áreas, el correo electrónico permite mantener colaboraciones sin desplazamientos, acceder a la cantidad enorme de información que circula por la red y conseguir artículos y pre-publicaciones de forma tan cómoda como rápida. También se han creado varias revistas electrónicas de matemáticas, y las “clásicas”, en papel, o al menos las mejores de entre ellas, tienen ahora más sentido como garantía de calidad que como vehículo de información, ya que la demora en la publicación ronda los dos años de media, mientras que los artículos pueden ser encontrados mucho antes en las páginas que sus autores tienen en la Red.

Una mención aparte merecen los procesos de texto, especialmente TeX y su descendiente LaTeX, que en pocos años han cambiado por completo el oficio de escribir matemáticas, siendo muy ostensible la mejora de la calidad y el abaratamiento de la impresión de revistas y monografías que tanto ha contribuido a aumentar la cantidad de las publicaciones. Pero ahí nos encontramos con un problema, porque la cantidad no va necesariamente asociada a un aumento de la calidad científica, sino más bien al contrario, observándose una proliferación excesiva de artículos prescindibles e irrelevantes. El *pauca sed matura* de Gauss, vigente hasta hace muy poco, ha sido olvidado de tal manera que lo que ahora impera es publicar mucho y rápido, aunque se trate de variaciones más o menos sencillas de temas conocidos.

A la situación anterior han contribuido diversas causas y una empresa, con sede en Filadelfia, que elabora todo tipo de índices de impacto de revistas y de citas de autores que, en aras de su presunta objetividad, son luego usados para evaluar la labor de los científicos, poniéndolos en fila a con sus áreas de investigación, universidades, regiones y países. Se trata de un fenómeno nuevo, propiciado por los ordenadores, que es de carácter universal aunque en algunos sitios haya adquirido mayor virulencia que en otros. Quienes han estudiado la elaboración de esos índices han señalado lo poco significativos que resultan en el caso de las matemáticas: porque los grandes avances han sido casi siempre obra de individuos aislados; los trabajos tardan varios años en ser publicados y otros tantos en ser citados, aunque luego puedan serlo sin límite de tiempo; porque alguien como Wiles puede dejar de publicar durante un largo periodo por estar trabajando en la prueba del Fermat o porque la existencia de muchos autores en un área dada no es una garantía de que estén creando matemáticas muy interesantes. Además de presentar algunos errores de grueso calibre ocurre que, como bien aprendieron los físicos, cualquier medida perturba el experimento y si aquélla tiene en cuenta el número de citas nos vamos a encontrar con directores de revistas que "recomiendan" a los autores de un trabajo, antes de ser aceptado, que citen a otros publicados en la misma revista, consiguiendo así subir notablemente el llamado índice de impacto. Pero también a miembros de un Club de citas, vengan o no vengan a cuento, y a autores con un cierto poder académico que han de ser citados profusamente por los más jóvenes si éstos no quieren atenerse a las consecuencias. Estas conductas se han dado y, aunque se trate sólo de una minoría quienes las practican, no cabe duda de que significan un quiebro respecto a la tradición anterior que era algo más caballeresca.

Cuando los índices son usados para distribuir algunos complementos retributivos (los famosos sexenios en España) con un criterio amplio, no merecen mayor reparo. Lo malo es cuando se utilizan para establecer políticas científicas, financiar los proyectos de grupos grandes en detrimento de otros más pequeños, establecer líneas de prioridad o en las promociones del escalafón universitario. Entonces tenemos un problema serio y hay que decir que la única manera reconocida de evaluar la labor de un científico es a través de la importancia y la dificultad de sus resultados, que están acompañados de la originalidad de las ideas y de las técnicas que haya introducido para obtenerlos. Lo demás es ruido. Pero eso sólo puede apreciarlo quien esté en condiciones de hacerlo, y ahí tenemos otro problema. En sociedades más vertebradas científicamente que la española se tienen instituciones de prestigio cuyos miembros conocen y ejercen el canon, pero nos tememos que ése no sea nuestro caso y, quizás por ello, circulan por la Red escritos señalando a nuestro país como un ejemplo de uso excesivo de tales índices, tanto por los tribunales de oposición como por los mismos responsables de la política científica que los han llevado al BOE.

Uno puede fácilmente encontrar en Internet su árbol genealógico matemático, su número de Erdös o saber cuántos caminos de colaboración distintos le conectan con Euler, Lagrange, Hilbert o con ese otro colega que tan mal nos cae; descubrir que esos caminos son, en general, sorprendentemente cortos y apreciar lo que ello significa acerca del oficio y las relaciones de los matemáticos. Desde la perspectiva de este ensayo es interesante resaltar que el tratamiento de esa enorme fuente de datos que constituyen las publicaciones científicas ha sido posible gracias a los ordenadores y a Internet. Pero también que ha propiciado un cambio de estilo y de valores. Porque todavía en los años setenta del pasado siglo se consideraba de mal gusto que el director firmara los artículos de la tesis con su doctorando; aunque circulase la leyenda de que, en muchos casos, una tesis era un trabajo del director realizado en circunstancias adversas. Tampoco se entendía que un mismo autor publicase trabajos distintos con ideas muy parecidas, siendo entonces poco común que alguien alcanzase cien publicaciones, que es un número que ahora se sobrepasa con facilidad por muchos artistas y, en general, estaban mal vistas las autocitas. Se estilaban pues otras maneras que podríamos calificar de más señoriales, había menos publicaciones y éstas eran más significativas. El ordenador e Internet han puesto a algunos matemáticos a mirarse los índices y a publicar como obsesos, han multiplicado la cantidad de información y han hecho su circulación más asequible y rápida. Pero nos ha originado la colosal tarea de discernir el grano, que es mucho, de la paja, que es inmensa.

Antonio Córdoba Barba
Catedrático de Análisis Matemático
UAM